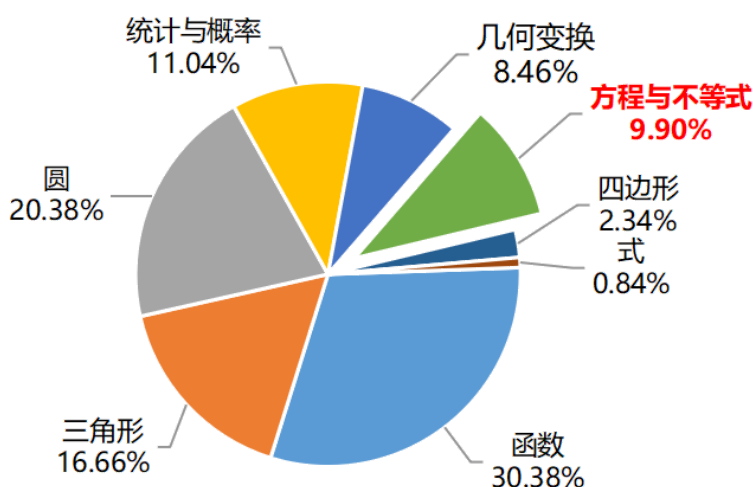


第1讲 一元二次方程的概念及解法

一元二次方程属于人教版教材第二十一章的内容，后续也会与二次函数进行综合。本模块《一元二次方程》，重点包括一元二次方程的解法、根系关系，同时也需要学生在理解概念及解法的基础上，进行实际应用，为后续相关知识的学习奠定基础。

本模块难度适中，适用于基础知识的夯实，本模块为一元二次方程的概念及解法、一元二次方程的判别式和根系关系、一元二次方程的实际应用3讲内容，加油站与讲义内容完全对照，帮助学生巩固薄弱点和易错点。

知己知彼



知识点	难度	考频
一元二次方程的概念	★★	低
一元二次方程的解法	★★	高
一元二次方程的判别式	★★★	高
一元二次方程的根系关系	★★★★	中
一元二次方程的实际应用	★★★★	高

一、一元二次方程的概念

一元二次方程

一元二次方程概念：只含有_____，并且未知数的最高次数是_____的_____方程，叫做一元二次方程。

一元二次方程的一般式：_____，_____为二次项系数；_____为一次项系数，_____为常数项。

一元二次方程的解：使方程左右两边_____的未知数的值就是这个一元二次方程的_____，一元二次方程的解也叫做一元二次方程的_____。

举个“栗子”

栗子1

1. 下列关于 x 的方程：① $ax^2 + bx + c = 0$ ；② $3(x-9)^2 - (x+1)^2 = 1$ ；③ $x+3 = \frac{2}{x}$ ；④ $(a^2 + a + 1)x^2 - a = 0$ ；⑤ $\sqrt{x+1} = x-1$ ，其中一元二次方程的个数是（ ）。
- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
2. 下列关于 x 的方程是一元二次方程的是（ ）。
- A. $x^2 + 1 = 0$ B. $x + \frac{1}{x} = 1$
C. $ax^2 + bx + c = 0$ D. $(x+1)(x-1) = x^2 + x + 1$
3. 若一元二次方程 $(m-2)x^2 + 3(m^2+15)x + m^2 - 4 = 0$ 的常数项是0，则 m 的值是_____。

栗子2

4. 一元二次方程 $4x^2 - 1 = 5x$ 的二次项系数、一次项系数、常数项分别为（ ）。
- A. 4, -1, 5 B. 4, -5, -1 C. 4, 5, -1 D. 4, -1, -5
5. 一元二次方程 $(x+1)(3x-2) = 10$ 的一般形式是_____。

栗子3

6. 已知 m, n 是方程 $x^2 - 2x - 1 = 0$ 的两根，且 $(7m^2 - 14m + a)(3n^2 - 6n - 7) = 8$ ，则 a 的值等于（ ）。
- A. -5 B. 5 C. -9 D. 9

7. 关于 x 的方程 $a(x+m)^2+b=0$ 的解是 $x_1=-2, x_2=1$ (a, m, b 均为常数, $a \neq 0$), 则方程 $a(x+m+2)^2+b=0$ 的解是 () .
- A. $x_1=0, x_2=3$ B. $x_1=-4, x_2=-1$ C. $x_1=-4, x_2=2$ D. $x_1=4, x_2=1$
8. 已知方程 $(x-a)(x-3)=0$ 和方程 $x^2-2x-3=0$ 的解相同, 则 $a=$ _____.

|| 独步天下

9. 已知 a 是方程 $x^2-2013x+1=0$ 的一个根, 代数式 $a^2-2012a+\frac{2013}{a^2+1}$ 的值为_____.

二、一元二次方程的解法

1. 直接开方法

一般地, 对于方程 $x^2=p$

当 $p>0$ 时, 根据平方根的意义, 方程有两个_____的实数根_____;

当 $p=0$ 时, 方程有两个_____的实数根_____;

当 $p<0$ 时, 因为对任意实数 x , 都有 $x^2 \geq 0$, 所以方程_____.

|| 栗子4

10. 关于 x 的一元二次方程 $(x-k)^2+k=0$, 当 $k>0$ 时的解为 () .
- A. $k+\sqrt{k}$ B. $k-\sqrt{k}$ C. $k \pm \sqrt{k}$ D. 无实数根
11. 解方程: $x^2-49=0$.

12. 解下列方程

(1) $4(x+1)^2=25$.

13. 解方程.

(1) $(x+1)^2=(1-2x)^2$.

2. 配方法

知识回顾：

1. 完全平方公式： $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$.

2. 试填空： $x^2 + 6x + 9 = (x + \underline{\quad})^2$, $x^2 - 4x + \underline{\quad} = (x - 2)^2$.

解方程： $5x^2 = 6x + 8$.

解题步骤：

①移项：把方程中含有未知数的项移到方程的____边，
常数项移到方程的____边；

②二次项系数化为____：根据等式的性质把二次项的系数化为____；

③配方：把方程两边都加上一____，
使左边配成一个完全平方式；

④开平方：运用____解方程 .

①移项，得_____，

②二次项系数化为1：_____，

③配方，得_____，

④开方，得_____，
解得_____ .

栗子5

14. 解关于 x 的方程 .

(1) $x^2 - 6x - 2 = 0$. (用配方法)

15. 解下列方程：

(1) $x^2 + 3 = 2\sqrt{3}x$.

16. 用配方法解方程： $3x^2 - 3 = 2x$.

3. 公式法

一元二次方程的求根公式是由配方法演变而来：

用配方法解方程： $ax^2 + bx + c = 0$ (a 、 b 、 c 为常数且 $a \neq 0$)

解：移项，得_____

二次项系数化为1，得_____

配方，得_____

即_____①

因为 $a \neq 0$ ，所以 $4a^2$ _____0. 式子 $b^2 - 4ac$ 的值有以下三种情况：

(1) $b^2 - 4ac > 0$ ，这时 $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} > 0$ ，由①得_____方程有两个不等的实数根_____

(2) $b^2 - 4ac = 0$ ，这时 $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$ ，由①可知方程有两个相等的实数根_____

(3) $b^2 - 4ac < 0$ ，这时 $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} < 0$ ，即 $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ _____0， x 取任何实数都不能使 $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 < 0$. 因此方程_____.

! 总结

1. 式子 $b^2 - 4ac$ 叫做一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)根的判别式，通常用希腊字母“_____”表示它，即_____.

2. 当_____时，方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)的实数根可写为_____的形式，这个式子叫做一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的_____.

🍎 举个“栗”子

栗子6

17. 解方程： $2x^2 - 3x - 1 = 0$.

18. 解下列方程：

(1) $4x^2 - 3x = x + 1$.

4. 因式分解法

解一元二次方程时，先_____，使方程化为两个一次式的乘积等于0的形式，再使这两个一次式分别等于0，从而实现_____，这种解一元二次方程的方法叫做**因式分解法**。

因式分解法的根据：如果两个因式的乘积等于0，那么这两个因式_____为0，反过来，如果两个因式中有一个因式为0，那么它们之积为0，即 $ab=0$ ，则_____或_____或_____

例如： $(2x-1)(3-x)=0$ ，则_____或_____，从而可得到方程的解。

！总结（1）解一元二次方程的**思想方法**：_____

（2）因式分解法的一般**步骤**：①将方程化为一元二次方程的一般形式；

②把方程的左边分解为两个_____；

③令每个因式为___，得到两个一元一次方程；

④解这两个一元一次方程得原方程的解。

栗子7

19. 方程 $x^2 - 4x - 12 = 0$ 的解为（ ）。

A. $x_1 = 2, x_2 = 6$

B. $x_1 = 2, x_2 = -6$

C. $x_1 = -2, x_2 = 6$

D. $x_1 = -2, x_2 = -6$

20. 解下列方程：

（1） $3x^2 + 2x - 1 = 0$ 。

（2） $3(x-5)^2 = 2(5-x)$ 。

21. 解方程。

（1） $(x-1)(x+3) = 12$ 。

（2） $(x-3)^2 + 4x(x-3) = 0$ 。

22. 解下列一元二次方程。

（1） $x(2x-5) = 4x-10$ 。

（2） $(x-4)^2 = 9(5-2x)^2$ 。